De quand date le premier rapprochement entre la suite de Fibonacci et la division en extrême et moyenne raison?

par

LEONARD CURCHIN* et ROGER HERZ-FISCHLER**

«La divine proportion ne peut cependant pas être exprimée en nombres de façon exacte; néanmoins elle peut être exprimée de telle façon que, à travers un processus infini, nous pouvons en rapprocher de plus en plus et en délimitant le carré nous ne sommes jamais à plus d'une unité.» [Kepler, 1608]

Dans sa lettre du 12 mai 1608 au professeur Joachim Tanckius, Kepler montre sa connaissance du résultat suivant: Si f_n est le terme général de la suite 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 ... déterminée par la relation $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ et si $\tau = (1+R(5))/2$ est la valeur numérique associée au rapport déterminé par la division d'une ligne en extrême et moyenne raison (*d.e.m.r.* – voir *Eléments* VI, def. 3) alors:

$$f_{n+1}/f_n \text{ est une approximation de } \tau. \tag{1}$$

De plus, comme l'indique la citation, Kepler connaissait la relation suivante:

$$(f_{n+1})^2 - f_n \cdot f_{n+2} = \pm 1. \tag{2}$$

Le nom de Fibonacci est maintenant associé à cette suite car elle se trouve dans le «problème des lapins» publié dans le *Liber abaci* de 1202 [Fibonacci, I,283]. Or, comme nous le verrons plus loin, il est né-

* Centre Pierre Paris, Université de Bordeaux III; ** Department of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Ontario, Canada.

Centaurus 1985: vol. 28: pp. 129–138

cessaire d'insister sur le fait que, en dépit de sa grande maitrise des propriétés de la *d.e.m.r.*, Fibonacci n'indique d'aucune façon qu'il connaissait le résultat (1).

Cette lettre de Kepler a été considérée jusqu'à maintenant comme le premier énoncé *explicite* des résultats (1) et (2). Or, pendant nos recherches au sujet de la transmission de certains aspects des *Eléments* nous avons remarqué la note manuscrite à propos du théorème II,11 reproduite ici et qui se trouve dans un exemplaire de l'édition de Pacioli datant de 1509.[1] Le texte se lit comme suit:

> Sit linea ab 233 pedum, divisa ut docet 11 huius in duo inaequalia in puncto h et sit bh portio eius maior 144 et ha portio eius minor 89. ducatur ab in ha et perveniunt 20737 et bh in se et perveniunt 20736. et sic cognosces quod in mutationibus non est laborandum quid impossible est numerum ita dividi ut ista 11 proponit. similiter accidit si linea 13 pedum dividatur in lineam 8 pedum, et lineam 5.

> Soit ab une ligne de 233 pieds divisée au point h en deux parties inégales comme l'enseigne le théorème 11 de ce livre et que la grande partie bh soit 144 et que la petite partie ha soit 89. Que ab soit multiplié par ha et on obtient 20737; que bh soit multiplié par luimême et on obtient 20736. Et de cette manière vous apprendrez qu'il ne faut pas s'appliquer à montrer par des substitutions qu'il est impossible qu'un nombre soit divisé comme le propose votre [théorème] 11. Et une chose semblable arrive si une ligne de 13 pieds est divisée en une ligne de 8 pieds et une ligne de 5.

L'utilisation par l'auteur des assez grands entiers de la suite – 89, 144 et 233 – indique une connaissance sûre de (1). De plus il semble, quoique nous ne puissions pas l'affirmer de façon sûre, qu'il connaissait la relation (2). Ceci parait être le sens de «similiter ...» dans la dernière phrase et est peut-être suggéré par la première partie de la phrase peu claire «et sic cognosces quod in mutationibus non est laborandum ...»

L'écriture elle-même ainsi que la date et le lieu de publication du livre indiquent qu'il s'agit d'un commentateur italien de la première moitié du 16ème siècle et donc bien avant l'époque de Kepler. La question qui se pose alors est de savoir quelles sont les indications dans les différents textes nous étant parvenus qui montreraient une connaissance ou un manque de connaissance de (1) et (2). Dans ce qui suit nous essayons donc de faire une synthèse de ces textes ainsi que des différentes hypothèses émises dans la littérature. Le problème, comme souvent dans l'histoire des mathématiques, est de faire la distinction entre «aurait pu démontrer» et «a démontré».

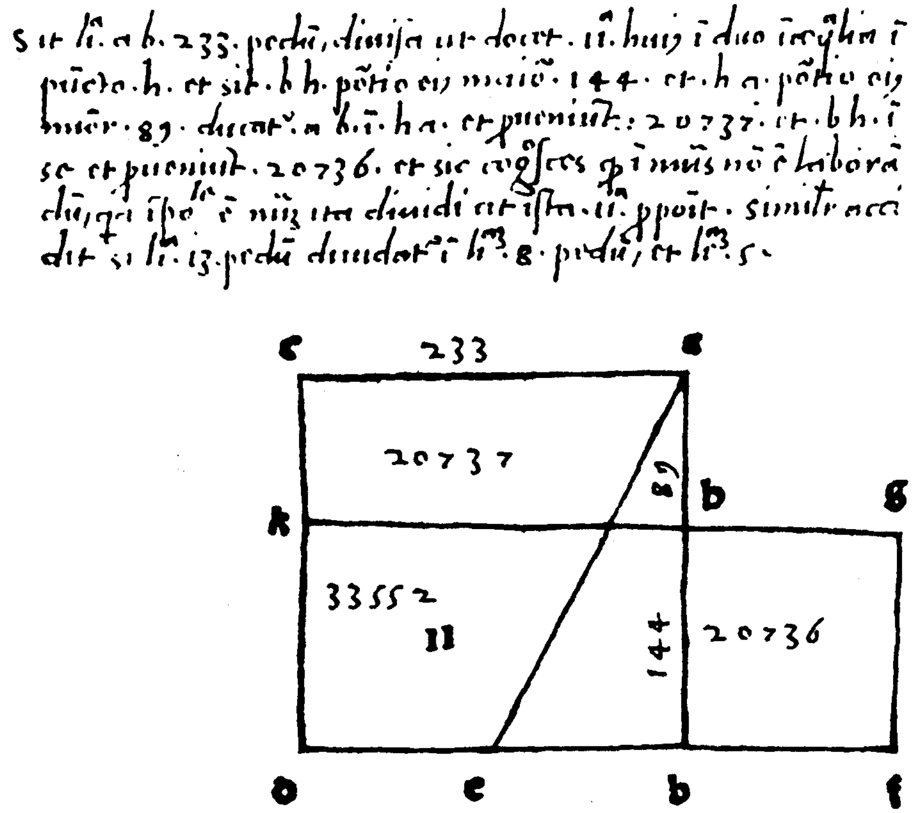

Figure 1. Annotation à Eléments II,11 dans une copie de l'édition d'Euclide par Pacioli.

1. Nombres latéraux et diagonaux pour le pentagone

Heller [1958] a suggéré que des mathématiciens à l'époque de Hippasus (-V[e] siècle) ont développé les nombres latéraux et diagonaux pour le pentagone à partir des relations:

$$s_n = d_{n-1};\ d_n = d_{n-1}+s_{n-1}. \tag{3}$$

Ces relations, en prenant $s_1 = 2$, $d_1 = 3$, donnent pour $d_n : s_n$ la suite $3:2$, $5:3$, $8:5$, $13:8$ ... Ensuite ils auraient utilisé les relations (3) pour en déduire le résultat de XIII,8: les diagonales d'un pentagone se coupent en *e.m.r.* Tout ceci impliquerait une connaissance de (1) et (2).

On peut reprocher, entre autres, à ces hypothèses de Heller le fait que les sources disponibles ne mentionnent jamais les nombres latéraux et diagonaux pour le pentagone comme c'est le cas pour le carré. De plus Heller, ainsi que les auteurs qui l'ont précédé, [Fritz, 1945, Junge, 1948] suppose que le résultat de XIII,8 était connu à une date relativement ancienne. Or les textes de II,11; IV,10,11, indiquent que le résultat de XIII,8 n'était pas connu, même de façon intuitive, quand le pentagone a été construit; voir [Fischler, 1979].

2. *Division d'une ligne en extrême et moyenne raison anthyphairèse*

Dans une série d'articles, Fowler soutient la thèse qu'il existait une théorie du concept de rapport basée sur l'anthyphairèse (voir X,2). Dans [Fowler, 1980, 1982] l'auteur interprète les théorèmes du livre II des *Eléments* comme étant ceux qui étaient nécessaires à l'étude de l'anthyphairèse. En particulier il suggère que II,11 a été développé en réponse au problème suivant: «Diviser une ligne telle que la suite qui résulte de l'anthyphairèse appliquée aux segments est [1,1,1,1 ...].»

Comme les rapports commensurables [1,1,1 ... 1] (voir X,3,5) sont précisément de la forme $f_{n+1}:f_n$ l'interprétation de Fowler implique une connaissance de (1). Malgré les arguments impressionnants de Fowler, il nous semble que II,11 a été développé comme lemme pour IV,10,11, c'est-à-dire la construction du pentagone; voir [Fischler, 1979].

3. *Scholium 73 a Euclide II,11 [Euclide-Heiberg, V,249]*

En voici la traduction:

> Soit la ligne entière AB coupée en 8 et ⅛. Donc en prenant le nombre contenu par le tout 5 + 3 et en multipliant cette somme par 3, elle devient 24: car 3 × 8 = 24. En prenant aussi les autres segments de BH c'est-à-dire le huitième de 8 et en y ajoutant 24 le [rectangle] contenu par le tout et un des segments est 25. En multipliant de la même façon le nombre de l'autre segment par lui-même, c'est-à-dire 5, nous obtenons 25: car 5 × 5 = 25. Donc le rectangle contenu par tout AH [il veut dire AB] et le reste du segment BH est égal au carré décrit par le segment AH qui reste.

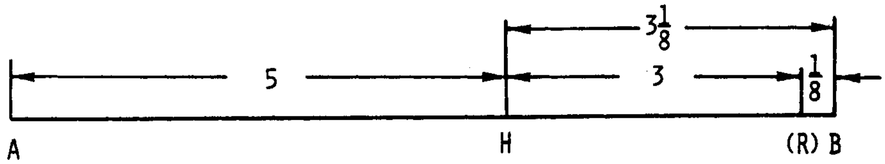

Figure 2.

Ce texte est loin d'être clair et précis et nous donnons ici notre interprétation:

La longueur totale de AB est $8\frac{1}{8}$ comme le note la première phrase. Le «nombre contenu par le tout» est l'entier 8. Maintenant AB est divisé en deux parties à H mais le texte ne nous dit pas de façon explicite quelles sont les valeurs de AH et HB. Par exemple, le texte mentionne le «... nombre de l'autre segment par lui-même c'est-à-dire 5 ...» et on pourrait penser à première vue que $AH = 5\frac{1}{8}$ et que «le nombre de l'autre segment» est 5, comme dans la deuxième phrase. Or le texte note: «En prenant aussi les autres segments de BH c'est-à-dire le huitième de 8 ...». L'utilisation dans cette phrase de pluriel «segments» en plus de «le huitième» suggère que le scholiaste traite HB comme étant de longueur $3 + \frac{1}{8}$ et que HB à son tour peut être divisé en deux segments $HR = 3$ et $RB = \frac{1}{8}$. Donc, nous pouvons supposer que $AH = 5$ exactement et que $HB = 3\frac{1}{8}$. L'aire du rectangle est donc: $AB \cdot BH = AR \cdot BH + RB \cdot BH = (AR \cdot HR + AR \cdot RB) + RB \cdot HB = (8 \cdot 3 + 8 \cdot \frac{1}{8}) + 3\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = (24 + 1) + 3\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$. La dernière valeur est simplement ignorée par le scholiaste qui obtient ainsi $25 = 5 \cdot 5 = AH \cdot AH$.

Il est à noter que cette interprétation donne $AH : HB = 8 : 5$ et $AB : AH = 13 : 8$. Or le manque de clarté du texte nous fait croire que nous avons affaire ici aux résultats d'une expérimentation avec des chiffres relativement petits plutôt qu'à une connaissance de (1) et à plus forte raison de (2).

Heller [1958,20] a parlé de ce scholium mais il a incorrectement interprété la première phrase comme voulant dire: «On divise la ligne entière en huit parties égales». Knorr [1975a,34], lui, suppose à tort que le scholiaste donne à HB une valeur exactement égale à 3. Cette interprétation se place dans le contexte de sa discussion des nombres latéraux et diagonaux et de l'anthyphairèse. Knorr semble vouloir suggérer que le scholiaste connaissait (2) et voulait montrer comment commencer par une mauvaise approximation ($HB = 3$) pour en obtenir une meilleure ($HB = 3\frac{1}{8}$). Nous pensons qu'il va trop loin en essayant d'arriver à de telles conclusions à partir d'un texte si obscur dont, ni la date, ni la source ne sont connues.

4. *Archimède*

Dans le manuscrit du *Métrica* I de Héron se trouvent deux bornes, dues à Archimède, pour le rapport entre la circonférence et le diamètre d'un cercle. Les chiffres donnés ne sont évidemment pas justes et Knorr [1975b] propose des corrections textuelles. Pour expliquer comment Archimède a pu arriver à ces nouvelles bornes, Knorr suggère qu'Archimède a suivi la méthode de «Sur la mesure du cercle» mais qu'au lieu de commencer par un hexagone, il a commencé par un décagone. Donc, selon la thèse de Knorr, Archimède aurait eu besoin d'estimations pour le rapport entre le côté du décagone et le rayon du cercle, c'est-à-dire la quantité τ et pour ceci, il a utilisé (1). Plus précisément il aurait utilisé le terme 6765 : 4181 comme borne inférieure et le terme 75025 : 46368 afin d'obtenir la borne supérieure 75045 : 46380. Dans l'appendice Knorr montre comment Archimède aurait pu arriver à ces termes.

Quoique les arguments de Knorr sont en général assez convaincants, ils présentent quelques aspects troublants. La borne initiale 75045 : 46380 a été choisie par Knorr parce que les rapports qu'il propose suggèrent une borne initiale avec 773 comme facteur de dénominateur et $46380 = 60 \times 773$. Mais on peut se demander si quelqu'un ne connaissant pas le résultat final serait arrivé à 75045 : 46380. Le même problème se pose pour la méthode d'itération qui fait sauter 5 termes à la fois et semble de nouveau faite pour quelqu'un qui connaissait le résultat. Par exemple dans le cas du décagone la quantité d est associée aux numérateurs des estimations initiales 8 : 5 et 5 : 3 au lieu d'aux dénominateurs comme c'est le cas pour la méthode suggérée pour l'hexagone de «sur la mesure du cercle».

Pour continuer notre enquête après la période d'Archimède nous devons considérer les textes où on avait besoin de calculer la quantité τ et voir quelle méthode a été utilisée.

5. *Héron*

Nous avons déjà discuté [Curchin et Fischler, 1981] un exemple très frappant du *Métrica* I,17,18 où Héron veut trouver l'aire d'un pentagone. En bref après avoir utilisé XIII,8 Héron avait besoin de calculer le rapport entre la diagonale et le côté c'est-à-dire τ. Pour ce calcul Héron n'utilise point (1) mais plutot XIII,1. Il existe aussi d'autres indices suggérant que Héron ne connaissait pas (1). Par exemple dans «Pyramides» ([Héron, III,361]) il veut calculer r si $a_5 = 12$. Sans commentaire Héron utilise l'approximation $a_{10} = a_5/2$ et ensuite XIII,10 ($a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$). Comme il n'était pas question de précision il aurait simplement pu utiliser (1) et $a_{10}/r = \tau$ (voir XIII,9 qui ne donne pas tout-à-fait ce résultat et [Herz-Fischler, 1985]).

6. *Ptolémée*

Dans son *Almagest,* Ptolémée [Ptolémée, 24] a besoin de calculer a_{10} quand $r = 60$. Comme dans le cas de Héron, Ptolémée aurait pu utiliser $a_{10}/r = \tau$ et ensuite (1), or il invoque II,11, XIII,9,10. Ptolémée ayant eu, évidemment, le souci de donner une présentation absolument rigoureuse, nous ne pouvons pas en déduire un manque de connaissance de (1). Plus révélateur est le texte de *Géographie* I,20 (voir [Toomer, 1973,24]). Par hasard la latitude 36° passe par Rhodes et donc pour trouver le rapport entre le parallèle et l'équateur Ptolémée doit calculer [corde (108°) : diamètre] et donne sans détails le rapport 93:115. Or le valeur théorique est $\tau/2$ et aucune valeur associée à (1) ne correspond à 93:115.

Notons que les tables trigonométriques arabes que nous avons vues utilisent la méthode de Ptolémée et que la table de Hipparcus (voir [Toomer, 1973]) ne semble pas avoir eu une valeur pour 36°.

7. *Abu Kamil*

Le livre *Sur le pentagone et le décagone* [Abu-Kamil] est plein de calculs qui ont un rapport avec la valeur τ mais Abu-Kamil utilise toujours des théorèmes du XIII livre des *Eléments* et les théorèmes de Pythagore et de Ptolémée pour ses calculs.

8. *Fibonacci*

Dans son traitement du pentagone [Fibonacci, II,105], ses calculs du volume du dodécaèdre [II,195] et ses versions des problèmes puisés dans le *Sur le pentagone et décagone* et *L'algèbre* de Abu-Kamil [II,207; I,438], Fibonacci montre une virtuosité frappante dans sa manipulation numérique et ses connaissances théoriques. Nous ne trouvons pourtant aucun signe de (1).

9. *Francesca*

Le *Trattato d'abaco* [Francesca-Arrighi 189–193, 208, 235–242] et *De quinque corporibus regularibus* [Francesca-Mancini, 506–510, 532–539], traitent des différents problèmes liés au pentagone, au dodécaèdre, et à l'icosaèdre. Francesca utilise les Livres XIII et XIV – de façon différente d'ailleurs de Fibonacci – et les proportions, mais ne montre aucune connaissance de (1).

10. *Bombelli*

Comme Bombelli a vécu de 1526 à 1572 il a été contemporain de l'auteur de la note manuscrite qui se trouve dans l'*Euclide* de Pacioli. Les méthodes de Bombelli [Bombelli, 657–662] pour le calcul des volumes du dodécaèdre et de l'icosaèdre sont d'un esprit très différent de celles de ses prédécesseurs. Ses premiers livres traitent de l'arithmétique et de l'algèbre; [voir l'introduction et p. 335, 360, 580], et nous sommes déjà en présence d'un mathématicien plus «moderne». Pourtant, ici encore, il n'y a aucune indication que Bombelli connaissait (1).

Notre synthèse a montré qu'après la période d'Archimède il n'y avait aucun indice qui nous permettrait d'affirmer une connaissance de (1), même si le scholium 73 avait une date beaucoup plus tardive comme c'est sûrement le cas. Quant à la période plus ancienne les suggestions de Heller et de Fowler, restent des hypothèses qui sont loin d'être démontrées. La reconstruction, par Knorr, des bornes dans le cas d'Archimède présente aussi des difficultés.

Même s'il était sûr que l'on connaissait (1) à une époque ancienne, nous aurions un autre problème à résoudre car l'utilisation de 89, 144, 233 dans la note manuscrite, sans aucune explication, suggère que le commentateur n'est pas celui qui a (re)découvert (1) et donc nous aurions à nous demander qui l'a précédé.

REMERCIEMENT

Les auteurs tiennent à remercier le Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada de nous avoir accordé une bourse postdoctorale et une bourse de travail libre pour l'année 1982–1983 qui nous a permis de terminer nos recherches pour cet article.

BIBLIOGRAPHIE

Abu Kamil 1971. *Abu Kamil's «On the Pentagon and Decagon»,* (M. Yadegari, M. Levey traducteurs), Tokyo.

Bombelli 1966. *Rafael Bombelli da Bologna/'L'algebre',* (E. Bortolotti rédacteur), Milano.

Curchin, L. et Fischler, R. 1981. «Hero of Alexandria's Numerical Treatment of Division in Extreme and Mean Ratio and its Implications», *Phoenix* 35, pp. 129–134.

Euclide-Heiberg 1883. *Euclides opera omnia,* (J. Heiberg et M. Menge rédacteurs), Leipzig 1883–1916, 9 volumes.

Euclide-Kayas 1978. *Euclide/'Les éléments',* Paris.

Fibonacci 1857. *Scritti de Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo,* (B. Boncompagni rédacteur), Rome 1857, 1862, 2 volumes.

Fischler, R. 1979. «A Remark on Euclid II,11», *Historia Mathematica,* 6, pp. 418–22.

Fowler, D. 1980. «Book II of Euclid's Elements and a Pre-Eudoxean Theory of Ratio», *Archive for History of Exact Sciences,* 22, pp. 5–36.

Fowler, D. 1982. «Book II of Euclid's Elements and a Pre-Eudoxean Theory of Ratio: Part 2: Sides and Diameters», *Archive for History of Exact Sciences,* 26, pp. 193–209.

Francesca-Arrighi 1970. *Piero della Francesca 'Trattato d'abaco',* (G. Arrighi rédacteur), Pisa.

Francesca-Mancini 1916. «L'opera 'De corporibus regularibus' di Piero Francheschi detto della Francesca, usurpata da Fra Luca Pacioli» (G. Mancini rédacteur), *Atti Accad. Lincei Mem. Cl. Sci. Morali Stor. Filol.,* 5ème série, 14, pp. 441–580 + 8 planches.

Fritz, K. von 1945. «The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum», *Annals of Mathematics,* 46, pp. 242–264.

Heller, S. 1958. «Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer», *Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik, und Technik,* 6, pp. 5–28.

Heron 1974. *Codex Constantinopolitanus,* (E. Bruins rédacteur), Leiden, 3 volumes.

Herz-Fischler, R. 1984. «What are propositions 84 and 85 of Euclid's *Data* all about?» *Historia Mathematica,* 11, pp. 86–91.

Herz-Fischler, R. 1985. «Theorem XIV** of the first 'Supplement' to the *Elements*», à paraître.

Junge, G. 1948. «Flachenanlegung und Pentagramm», *Osiris*, 8, pp. 316–345.

Kepler, J. 1608. «Lettre à Joachim Tanckius» dans *Gesammelte Werke*, (M. Caspar, F. Hammer rédacteurs), tome 16, pp. 154–165, 429.

Knorr, W. 1975a. *The Evolution of the Euclidean Elements, A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and its Significance for Early Greek Geometry*, Dordrecht.

Knorr, W. 1975b. «Archimedes and the Measurement of the Circle: A New Interpretation», *Archive for History of Exact Sciences*, 15, pp. 115–140.

Ptolémée 1963. *Ptolemäus, Handbuch der Astronomie*, 2ème édition, (K. Manitius traducteur), Leipzig.

Toomer, G. 1973. «The Chord Table of Hipparchus and the Early History of Greek Trigonometry», *Centaurus* 18, pp. 6–28.

NOTE

1. Bibliothèque Nationale (Paris) cote Réserve V.104. Il n'y a malheureusement aucune indication dans le livre quant à son propriétaire, ni quant à la date à laquelle il est entré à la *B.N.* La figure même, sans les chiffres, est imprimée dans le texte. Un microfilm du livre se trouve à la bibliothèque de Carleton University, Ottawa. L'énoncé de II,11 se lit comme suit [Euclide-Kayas]: «Partager un segment donné de façon à ce que le rectangle du segment tout entier et de l'une de ses parties [ahkc] soit équivalent au carré de l'autre partie [bhgf]». Ceci est la version géométrique de VI, def. 3.